Corso di laurea in Matematica - Anno Accademico 2013/2014

AM110 - Analisi Matematica 1- Tutorato VIII

DOCENTE: PROF. PIERPAOLO ESPOSITO

TUTORI: A. MAZZOCCOLI, M. NANNI

SOLUZIONI

ESERCIZIO 1. Discutere la convergenza delle seguenti serie numeriche a termini alterni.

$$\bullet \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos n^4}{n^2+1}:$$

Studiamo la convergenza assoluta della serie:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left| \frac{\cos n^4}{n^2+1} \right| \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2+1} \approx \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} < +\infty.$$

Per confronto la serie converge assolutamente e dunque anche semplicemente.

$$\bullet \sum_{n=1}^{+\infty} 2^n \sin \frac{1}{3^n}:$$

Per confronto la serie converge:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} 2^n \sin \frac{1}{3^n} \approx \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n}{3^n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n < +\infty$$

$$\bullet \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{2^n+n}{3^n+n^2}:$$

Poiché $a_n = \frac{2^n+n}{3^n+n^2} \geq 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$ e $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$, per Leibnitz la serie converge semplicemente. D'altronde osserviamo che la serie converge anche assolutamente applicando il criterio della radice n-sima:

$$\sqrt[n]{\frac{2^n+n}{3^n+n^2}} \to_n \frac{2}{3}.$$

$$\bullet \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{5^n} - \frac{1}{3^n}$$

Studiando separatamente $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{5^n}$ e $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{3^n}$ notiamo che sono entrambe serie a termini positivi, geometriche di ragione maggiore di 1 dunque convergono. A maggior ragione la serie delle differenze termine a termine converge.

$$\bullet \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \sin\frac{1}{n}$$

Innanzitutto osserviamo che:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \sin\frac{1}{n} \approx \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{n}$$

La serie ottenuta col confronto asintotico converge semplicemente per Leibnitz, ma non converge assolutamente (è la serie armonica).

$$\bullet \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n^2}$$

La serie converge assolutamente (è la serie armonica generalizzata $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}$con $\alpha = 2$) dunque converge anche semplicemente.

$$\bullet \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n (\sqrt[n]{3} - 1)$$

Per Leibnitz la serie converge semplicemente. Osserviamo poi che non converge assolutamente poiché:

$$\sqrt[n]{3} - 1 = 3^{\frac{1}{n}} - 1 = e^{\frac{1}{n}\log 3} - 1 \approx \frac{\log 3}{n}$$

E quindi $\sum_{n=1}^{+\infty} (\sqrt[n]{3} - 1)$ si comporta come la serie armonica che diverge.

$$\bullet \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n n e^{-n^2}$$

Per Leibnitz la serie converge semplicemente, ma si verifica facilmente col criterio della radice n-sima che la serie converge anche assolutamente:

$$\sqrt[n]{ne^{-n^2}} = \frac{\sqrt[n]{n}}{e^n} \to_n 0.$$

$$\bullet \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt{n}\cos(n\pi)}{n^3+3}$$

Vediamo subito che, per una proprietà dimostrata induttivamente già nel primo tutorato:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt{n}\cos(n\pi)}{n^3+3} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt{n}(-1)^n}{n^3+3}$$

Studiamo ora questa serie a termini alterni osservando che converge semplicemente per Leibnitz, ma anche assolutamente per confronto asintotico con la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{\frac{5}{2}}}$.

Esercizio 2. Discutere la convergenza della seguente serie numerica al variare del parametro $x \in \mathbb{R}$.

$$\bullet \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x+n}{1+n^3x^2}$$

Per $x = 0$ avremmo $\sum_{n=1}^{+\infty} n$ che diverge banalmente. Ora, sfruttando la proprietà archimedea, troviamo che, per n grandi e $x \neq 0$:

$$\Big| \frac{x+n}{1+n^3x^2} \Big| \leq \frac{2n}{n^3x^2} = \frac{2}{n^2x^2}$$

Poiché $\forall x \neq 0$ abbiamo che $\frac{2}{n^2x^2} \approx \frac{1}{n^2}$, per confronto asintotico la nostra serie converge sempre al variare di x diverso da 0.

Esercizio 3. Discutere la convergenza della seguente serie numerica al variare del parametro $x \geq 0$.

$$\bullet \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2}{\left(x+\frac{1}{n}\right)^{\ln n}}$$

Per $x = 0$ avremmo $\sum_{n=1}^{+\infty} n^{2+\ln n}$ che diverge banalmente. Ora vediamo che:

$$\frac{n^2}{\left(x+\frac{1}{n}\right)^{\ln n}} \approx \frac{n^2}{x^{\ln n}} = \frac{e^{2\ln n}}{x^{\ln n}} = \left(\frac{e^2}{x}\right)^{\ln n}$$

Per cui la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{e^2}{x}\right)^{\ln n}$, asintoticamente equivalente alla nostra serie di partenza, diverge se $0 \leq x \leq e^2$. Per $x > e^2$ sono verificate le condizioni per utilizzare il criterio di Cauchy che trasforma la nostra serie nel modo seguente:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2}{x^{\ln n}} = \sum_{n=1}^{+\infty} 2^n \frac{2^{2n}}{x^{n \ln 2}} = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{8}{x^{\ln 2}}\right)^n$$

La serie così ottenuta è una geometrica che converge per $x^{\ln 2} > 8$, cioè per $x > e^3$.

Esercizio 4. Discutere la convergenza della seguente serie numerica al variare del parametro $x \in \mathbb{R}$.

$$\bullet \sum_{n=1}^{+\infty} 2^{-\sqrt{n}} \left(\frac{x}{x+1}\right)^{\sqrt{n}}$$

Vediamo innanzitutto che se $\Big| \frac{x}{2(x+1)} \Big| \geq 1$ la condizione necessaria non è verificata, per cui per tutte le x che soddisfano la disequazione la serie diverge. Se invece $\Big| \frac{x}{2(x+1)} \Big| < 1$ studiamo la convergenza assoluta della serie. Così facendo, possiamo applicare il criterio di Cauchy, che trasforma la serie nel modo seguente:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \Big| \frac{x}{2(x+1)} \Big|^{\sqrt{n}} = \sum_{n=1}^{+\infty} 2^n \Big| \frac{x}{2(x+1)} \Big|^{2^{\frac{n}{2}}}.$$

Non resta che applicare il criterio della radice:

$$\sqrt[n]{2^n \Big| \frac{x}{2(x+1)} \Big|^{2^{\frac{n}{2}}}} = 2 \Big| \frac{x}{2(x+1)} \Big|^{\frac{2^{\frac{n}{2}}}{n}} \to_n 0 \Leftrightarrow \Big| \frac{x}{2(x+1)} \Big| < 1$$

La nostra serie dunque converge assolutamente quando $x \in (-\infty, -2) \vee x \in (-\frac{2}{3}, +\infty)$.

<u>Esercizio 5.</u> Studiare iniettività, suriettività e trovare l'inversa delle seguenti funzioni a valori reali.

$$\circ f(x) = 2x + 1$$

$\forall y \in \mathbb{R}$ dove $y = f(x)$ posso invertire la funzione:

$$y = 2x + 1 \Leftrightarrow x = \frac{y-1}{2}$$

$g(y)$ così ottenuta è proprio l'inversa cercata. Dunque la funzione è anche iniettiva e suriettiva sull'insieme dei numeri reali.

$$\circ f(x) = x^2 + 1$$

Vediamo che $f(x)$ non è iniettiva:

$$x_1^2 + 1 = x_2^2 + 1 \Leftrightarrow x_1^2 = x_2^2 \Leftrightarrow x_1 = |x_2| \Leftrightarrow (x_1 = x_2) \vee (x_1 = -x_2)$$

Vediamo che $f(x)$ non è suriettiva, infatti $x^2 + 1 \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$ e dunque $y = x^2 + 1$ con $y < 0$ non è mai verificata.
Posso infine scrivere un'inversa di $f(x)$ solo localmente:

$$g(y) = \begin{cases} \sqrt{y-1} & x \geq 0 \\ -\sqrt{y-1} & x < 0 \end{cases}$$

$$\circ f(x) = \tan x, \quad x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$$

Nel dominio di definizione $f(x)$ è invertibile:

$$y = \tan x \Leftrightarrow x = \arctan y$$

La funzione $g(y)$ è proprio l'inversa cercata. Questo ci permette di concludere che $f(x)$ è anche iniettiva e suriettiva.

$$\circ f(x) = \sqrt{x}$$

Notiamo innanzitutto che il dominio di definizione della funzione è $\mathbb{R}^+$. Sul dominio la funzione è invertibile:

$$y = \sqrt{x} \Leftrightarrow x = y^2$$

La funzione $g(y)$ così ottenuta è proprio l'inversa cercata. Come negli esempi precedenti, la funzione è quindi anche biettiva.

$$\circ f(x) = 2 \ln |x|$$

Vediamo che $f(x)$ non è iniettiva:

$$2 \ln |x_1| = 2 \ln |x_2| \Leftrightarrow |x_1| = |x_2| \Leftrightarrow (x_1 = x_2) \vee (x_1 = -x_2)$$

$f(x)$ è però suriettiva (si verifica facilmente con i limiti per $x \to 0^+$ e $x \to +\infty$).
Posso definire un'inversa di $f(x)$ solo localmente:

$$g(y) = \begin{cases} e^{\frac{y}{2}} & x \geq 0 \\ -\, e^{\frac{y}{2}} & x < 0 \end{cases}$$

<u>Esercizio 6.</u> Studiare iniettività e suriettività delle seguenti funzioni a valori reali definite a tratti.

$$\circ f(x) = \begin{cases} 1 - x^2 & x \leq 0 \\ \lambda x + 1 & x > 0 \end{cases} \qquad \lambda \in \mathbb{R}$$

Osserviamo innanzitutto che $f_1(x) = 1 - x^2$ definita per $x \leq 0$ è un ramo di parabola, dunque invertibile, con $g_1(y) = -\sqrt{1-y}$. Non resta quindi che studiare $f_2(x)$ al variare di $\lambda \in \mathbb{R}$, ovvero il fascio proprio di rette di centro $(0,1)$ e definito per $x > 0$.
Se $\lambda < 0$ notiamo che $\exists x_1$ t.c. $f_1(x_1) = 0$ e $\exists x_2$ t.c. $f_2(x_2) = 0$, per cui la funzione non è iniettiva. Verifichiamo inoltre che non è suriettiva; infatti, si ha che $f_1(x) \leq 1 \quad \forall x \leq 0$ e $f_2(x) \leq 1 \quad \forall x > 0$. Basta quindi scegliere un valore $y > 1$ per avere che la condizione $y = f(x)$ non è verificata.
Se $\lambda = 0$, $f_2(x)$ diventa la retta orizzontale $f_2(x) = 1$, che indubbiamente è una funzione non iniettiva. Per provare che non è suriettiva si procede come nel caso $\lambda < 1$.
Se $\lambda > 0$, invertiamo $f_2(x)$ ottenendo $g_2(y) = \frac{y-1}{\lambda}$ È evidente dunque che $f(x)$ è suriettiva, poiché $g_1(y)$ è definita per tutte le $y \leq 1$, mentre $g_2(y)$ lo è per tutte le $y > 1$ (perché x dev'essere maggiore di 0). L'iniettività è anch'essa evidente, infatti:

$$1 - x_1^2 = \lambda x_2 + 1 \Leftrightarrow x_1^2 = -\lambda x_2$$

Ma questo è assurdo, perché $\lambda x > 0 \quad \forall x > 0$.

$$\circ f(x) = \begin{cases} (x-1)^2 & x \leq 1 \\ -\ln x & x > 1 \end{cases}$$

Vediamo, che nell'insieme di definizione, $f_1(x) \geq 0$ mentre $f_2(x) < 0$. Poiché inoltre sia $f_1(x)$ che $f_2(x)$ sono invertibili, l'iniettività è assicurata. Per la suriettività, come nell'esercizio precedente, non resta che verificare che $g_1(y) = 1 - \sqrt{y}$ è definita per tutte le $y \geq 0$ mentre $g_2(y) = e^{-y}$ lo è per tutte le $y < 0$ (perché x dev'essere maggiore di 1).